普物复习

Contents

普物复习

Chapter 25 重点：库仑定律

库仑定律

$$F_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

其中，ε_0是真空介电常数，大小为$8.85*10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2}$，$q_1$和$q_2$是两个点电荷，$r_{12}$是两个点电荷之间的距离，$\hat{r}_{12}$是两个点电荷之间的单位矢量。

一些模型

在这里我们记:

1. 线电荷密度：$\lambda=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$
2. 面电荷密度：$\sigma=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}A}$
3. 体电荷密度：$\rho=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$

圆环轴线上一点

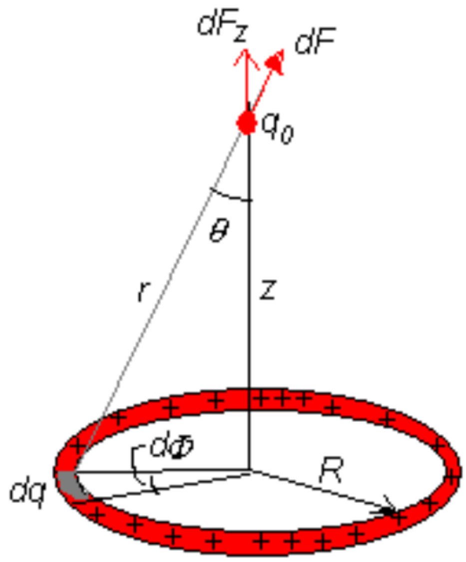


Figure 1: 圆环轴线上一点

如图，圆环均匀分布着大小为 q 的电荷。

我们记

$$\lambda=\frac{q}{2\pi R}$$

$$\mathrm{d}F_z=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0\,\mathrm{d}q}{r^2}\cdot\cos\theta$$

我们有:$\mathrm{d}q=\lambda\,\mathrm{d}s, r^2=R^2+z^2, \cos\theta=\frac{z}{r}=\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$

于是，

普物复习

$$F=\int \mathrm{d}F_z=\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\cdot\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda}{R^2+z^2}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}s$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{zq_0q}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

当$z\to+\infty$时，有

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0q}{z^2}$$

带电圆环

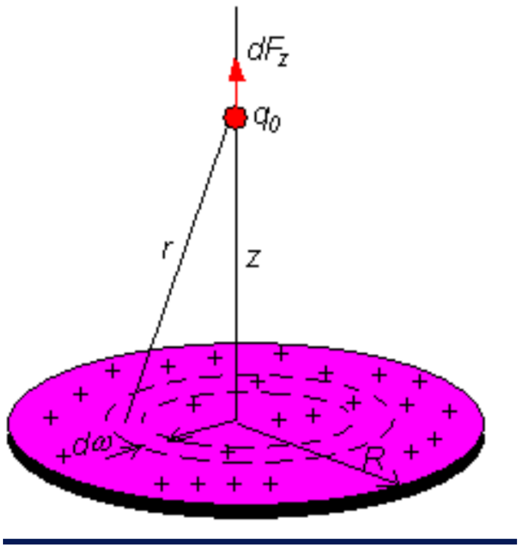


Figure 2: 圆环轴线上一点

记

$$\sigma=\frac{q}{\pi R^2}$$

我们把一个圆盘看作是从圆心不断堆叠出的一个个圆环。

对于距离圆心x的圆环,$\mathrm{d}q=\sigma 2\pi x\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F_z&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{zq_0\,\mathrm{d}q}{(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{zq_0\sigma 2\pi x\,\mathrm{d}x}{(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{zq_0 2\pi x\,\mathrm{d}x}{(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\times\frac{q}{\pi R^2}\\&=\frac{zq_0q}{2\pi\varepsilon_0R^2}\cdot\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

因此积分得：

$$F_z = \int \mathrm{d}F_z = \frac{zq_0q}{2\pi\varepsilon_0R^2}\int_0^R \frac{x\,\mathrm{d}x}{(z^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q_0q}{R^2}\cdot\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

Chapter26 Electric Field

Electric Field

$$\vec{E} = \frac{F}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot\hat{r}$$

电偶极子与电偶极矩

电偶极子是由两个大小相等、符号相反的点电荷组成的系统，分别为正电荷$+q$和负电荷$-q$，它们之间的距离为d。

计算公式为：

$$p = qd$$

其中p为电偶极矩，d为两个点电荷之间的距离,q 为电荷大小,方向由负电荷指向正电荷。

电偶极矩与力矩也有关系。

$$\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}$$

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

一些模型

无限长直导线：

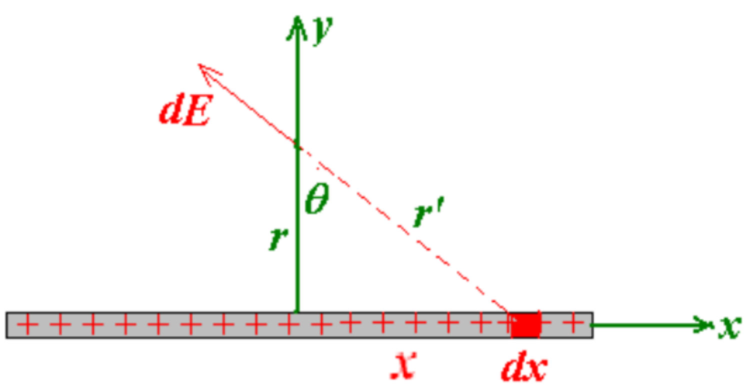


Figure 3: 无限长直导线

令无限长直导线上的线电荷密度为λ，则我们想要推导出空间任意一点的电场强度。

由对称可得，无限长直导线在空间任意点产生的$E_x = 0$，因此我们只要计算E_y即可。

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_y &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\cos^2\theta\,\mathrm{d}x}{r^2}\cdot\cos\theta \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,\mathrm{d}\theta}{r}\cdot\cos\theta\end{aligned}$$

这样，我们发现除了θ和$\cos\theta$以外，其他的都是常数，因此我们可以得到

$$\begin{aligned}E_y &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\end{aligned}$$

圆环:

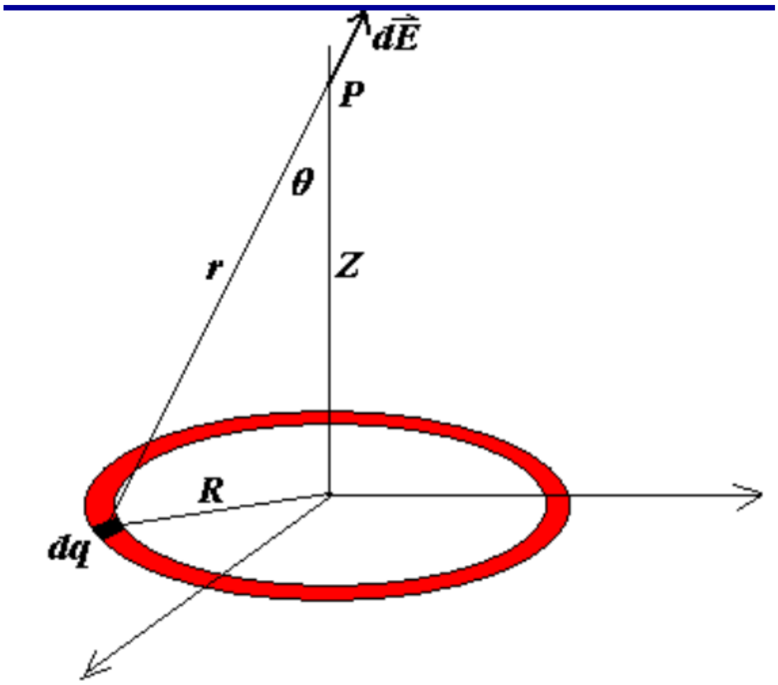


Figure 4: 圆环

我们记圆环上的面电荷密度为λ，我们想要推导出圆环轴线上的电场强度。由对称性可得，电场强度只有E_z分量。

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_z &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\cdot\cos\theta \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,\mathrm{d}s}{R^2+z^2}\cdot\cos\theta \\ &= \frac{z\lambda\,\mathrm{d}s}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

于是，我们有

$$
\begin{aligned}
E_z &= \int \mathrm{d}E_z \\
&= \frac{z\lambda}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}s \\
&= \frac{z\lambda}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}2\pi R \\
&= \frac{zq}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

当$z\to+\infty$时，有

$$E_z=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$$

这和点电荷的电场强度是一样的。其实也是上面推导的圆环电场力直接除以q_0得到的。

带电圆环

一样的过程，直接放图片。

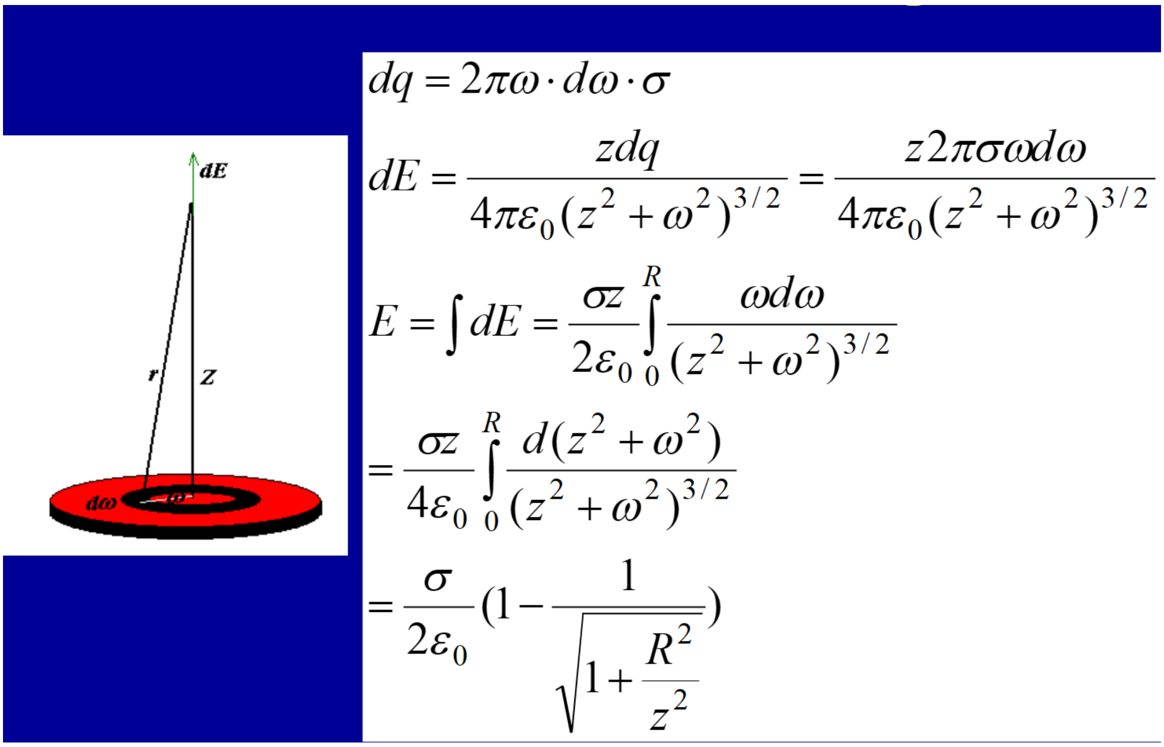


Figure 5: 带电圆环

Chapter 27 重点：高斯定理

高斯定理

高斯定理是用来计算电场强度的一种方法，它的公式为：

普物复习

$$\varphi = \oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{q_{\text{enclosed}}}{\varepsilon_0}$$

其中，φ是电场强度的通量，q是闭合曲面内的电荷总量，ε_0是真空介电常数。

另外，高斯定理还有微分形式：

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

这是利用数学分析里的高斯公式推出来的:

$$\iiint \nabla \cdot \vec{E} \,\mathrm{d}V = \iint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon} \iiint \rho \,\mathrm{d}V$$

这意味着电场强度在空间任意一点的散度等于该点的电荷密度除以真空介电常数。

使用高斯定理可以很轻松地得到上面一些模型:

无限长直导线

设想使用一个圆柱体表面包裹住，则

$$\varepsilon_0 E \cdot 2\pi r h = \lambda h$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$$

带电的无线大极板

普物复习

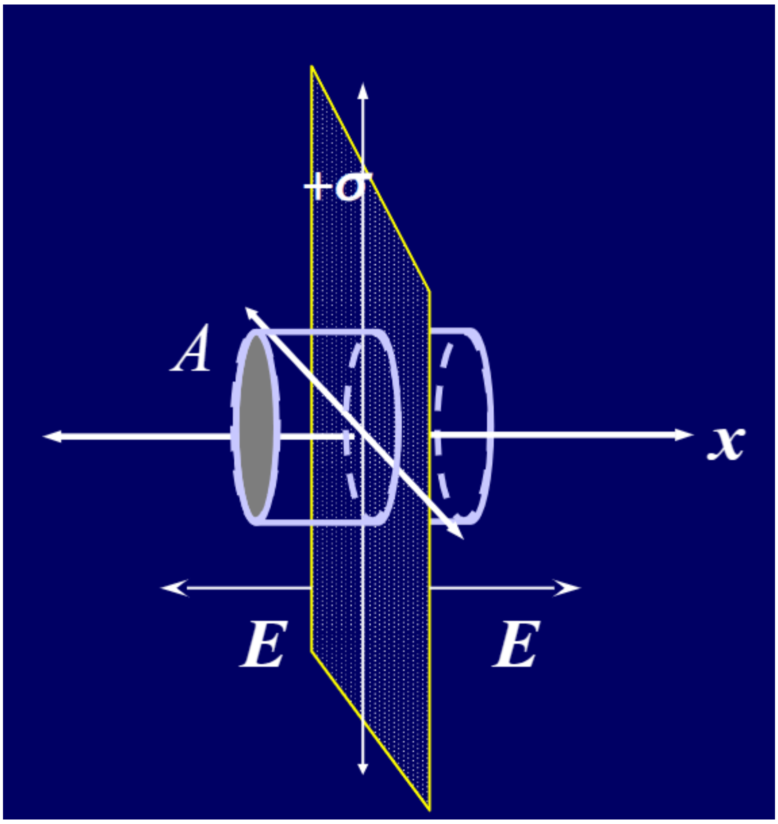


Figure 6: 带点的无限大极板

如图，取一个圆柱体（其实长方体也可以），由对称性我们可以知道，电厂强度只有E_x分量。则有

$$\varepsilon_0 E \cdot 2A = \sigma A$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

两个带电大平板

普物复习

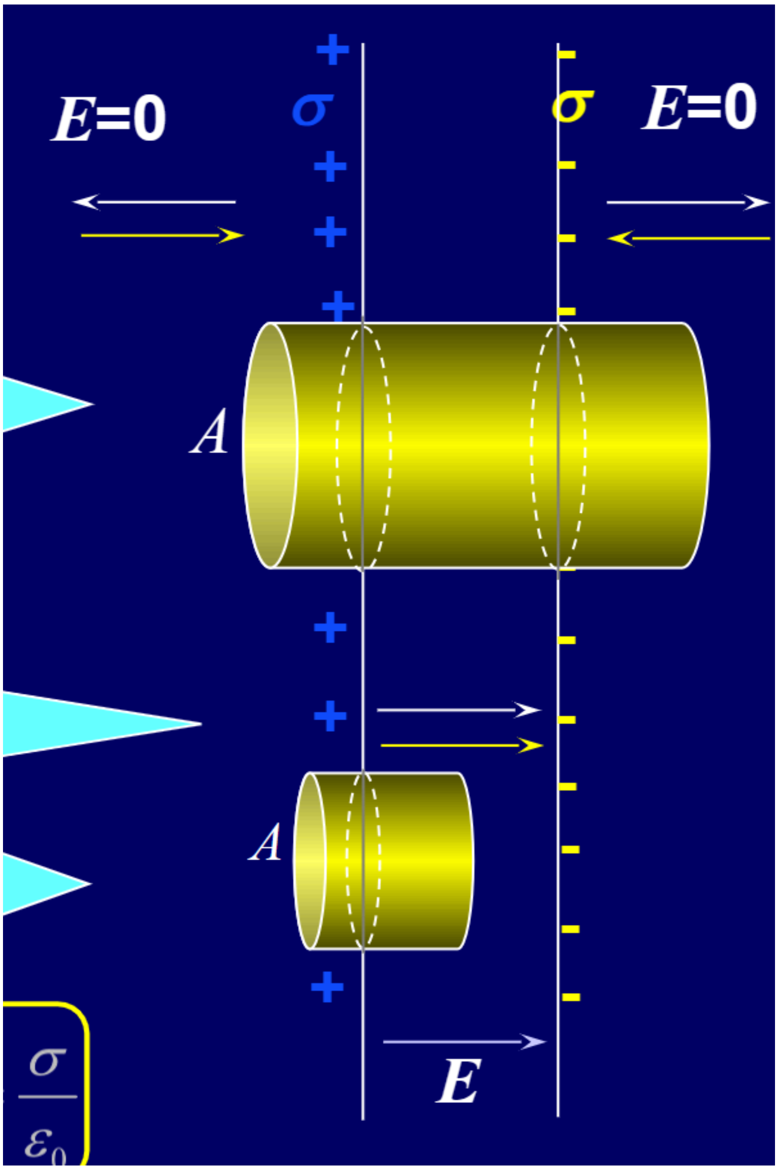


Figure 7: 两个带电大平板

我们看大的圆柱体，内部包裹的电荷是 0，因此电场强度为 0。

而在两个平板之间

$$\varepsilon_0 E \cdot A = \sigma A$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

实际上，这就是平行板电容器。

高斯定理也能用来解释导体内部的电场强度为 0 的原因:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

由于导体内部没有电荷，因此有

$$\rho = 0$$

所以有

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

这意味着导体内部的电场强度为 0。

Chapter 28 重点：电势与电势能

电势能

电场力是保守力，因此具有势能。电势能的定义为：

$$U_b - U_a = -q \int_a^b E \cdot \mathrm{d}l$$

静电场环路定理

环路定理是电场力的另一种表达方式，它的公式为：

$$\int_c \vec{E} \cdot \mathrm{d}l = 0$$

这意味着电场力在环路上的积分为 0。

电势

电势V定义为单位正电荷在电场中所具有的势能，它的公式为：

$$V = \frac{U}{q}$$

我们有

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}l$$

对于距离一个点电荷r的电势为：

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$$

一些模型

圆环

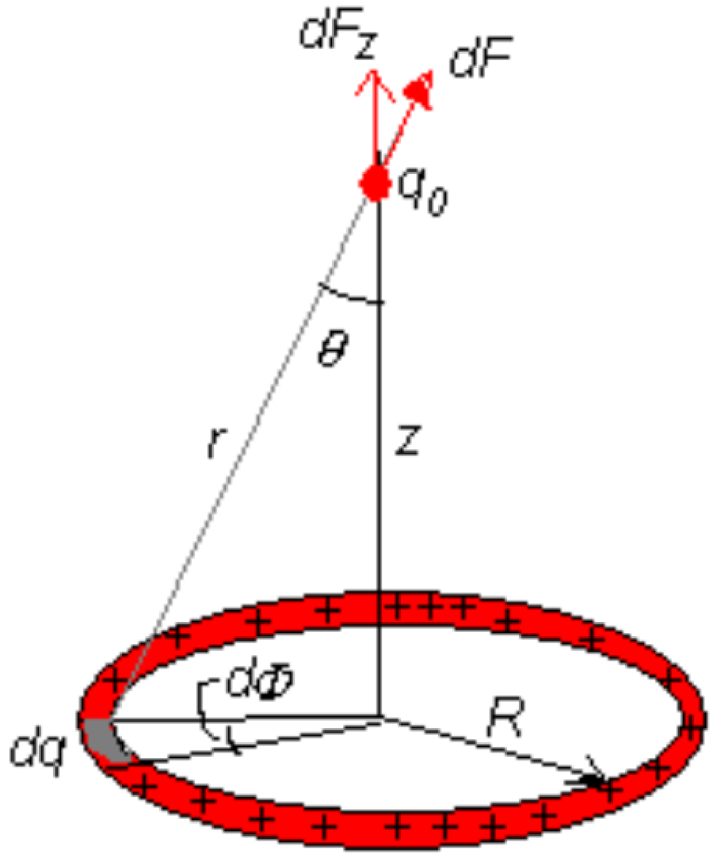


Figure 8: 圆环

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}V &= \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} \\
&= \frac{\lambda\,\mathrm{d}s}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}
\end{aligned}
$$

所以有

$$
\begin{aligned}
V &= \int \mathrm{d}V \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}\frac{s}{\sqrt{R^2+z^2}} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi R}{\sqrt{R^2+z^2}} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}
\end{aligned}
$$

结合上面的电场强度，我们可以得到

$$E = -\nabla V$$

带电圆盘

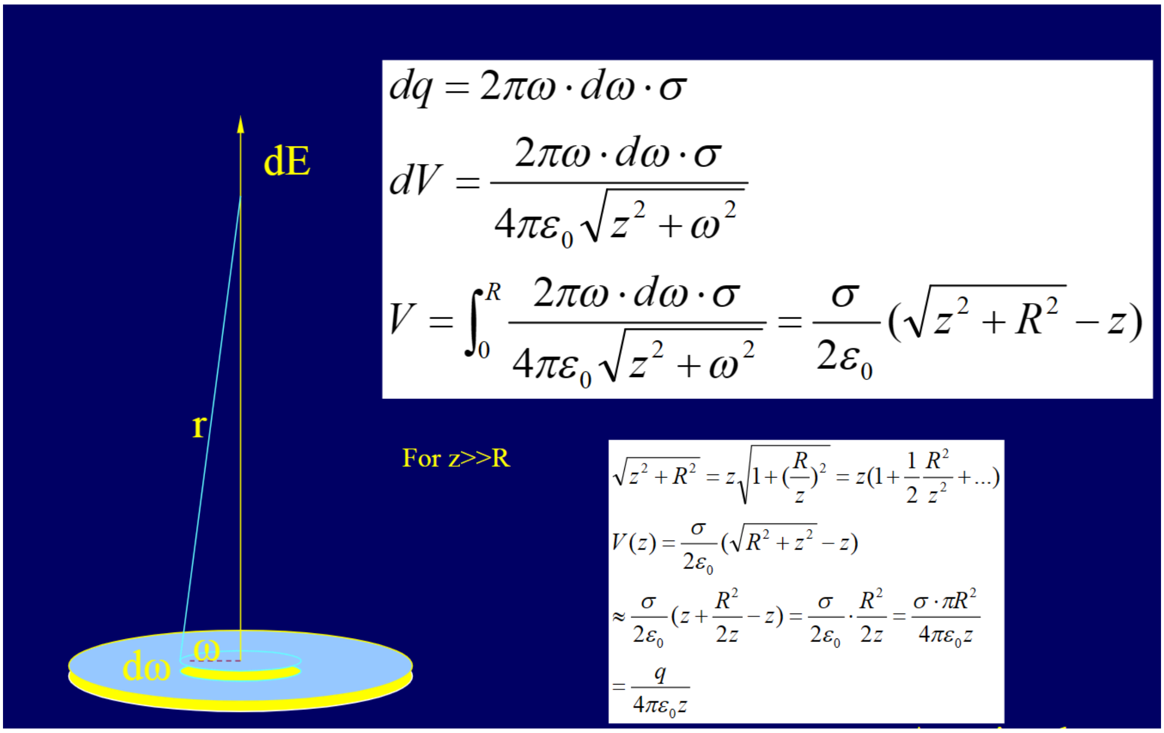


Figure 9: 带电圆盘

$\mathbf{V} \to E_x$

在任意的电场中，某点的电势与电场有如下关系:

$$E_x = -\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)_{\max}$$

这意味着电势的梯度方向就是电场的方向。

也可以写成:

$$E = -\nabla V$$

球坐标下的散度:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$$

$$\nabla \cdot V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 V)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta V)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

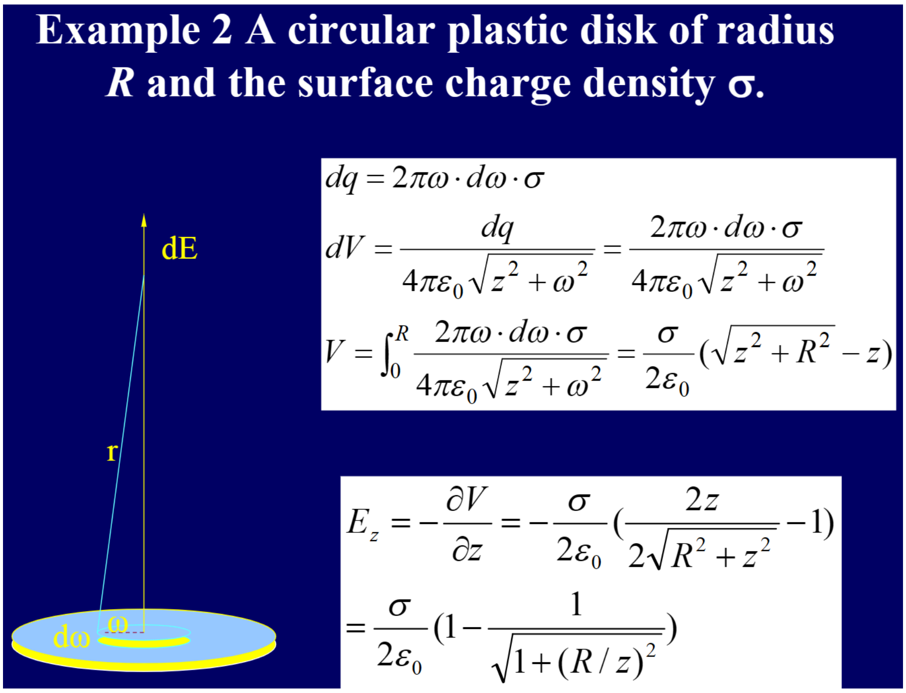


Figure 10: 例子

Chapter 30&29 重点：电容器与电介质

电容器

电容C定义为

$$C = \frac{q}{\Delta V}$$

平行板电容器中:

$$q = \sigma A$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta V = \oint E \cdot \mathrm{d}l$$

$$= \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

圆柱形电容器中:

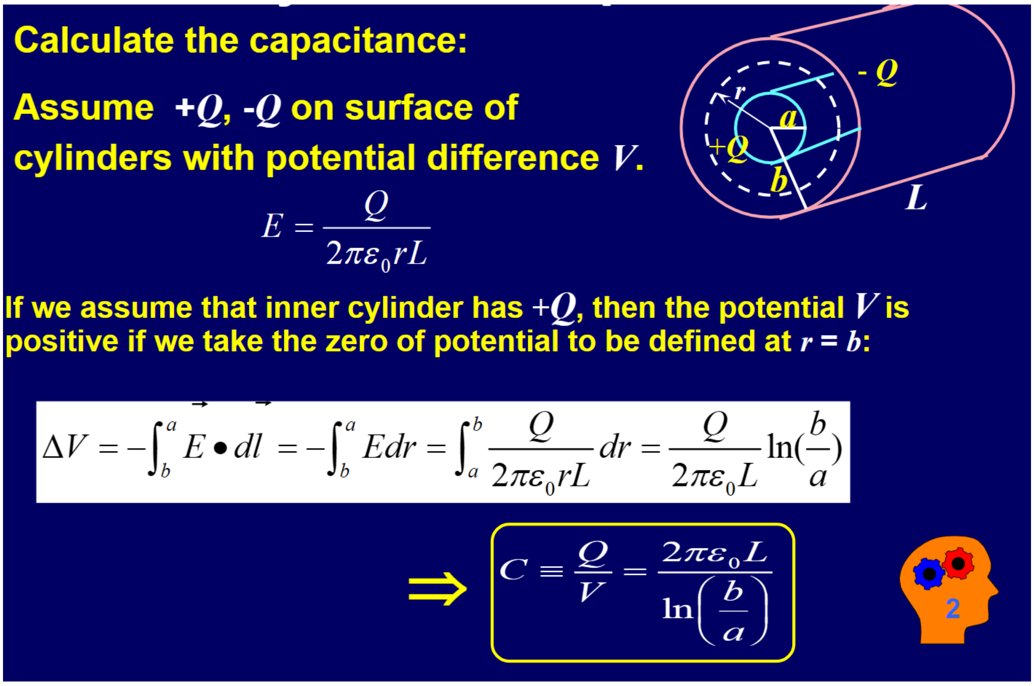


Figure 11: 圆柱形电容器

球形电容器中:

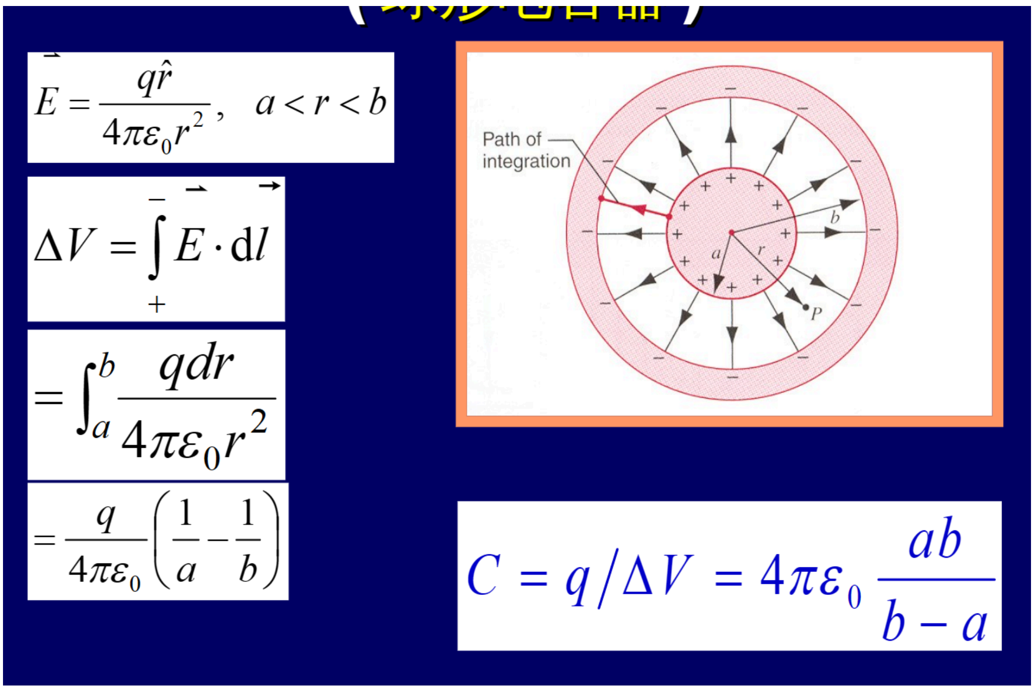


Figure 12: 球形电容器

根据球形电容器的电容，我们可以求出一个孤立球体的电容（把无穷远端视为另一个极板，也即$b \to +\infty$）：

$$C = 4\pi\varepsilon_0 a$$

电容器存储的能量定义为:

$$U = \frac{1}{2}CV^2$$

电场的能量密度:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

并联与串联

并联电容器的电容为:

$$C = C_1 + C_2$$

串联电容器的电容为:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

电介质

介电常数

介电常数指的是当电介质放在极板之间时，电容的增加倍数。符号为

$$\kappa_e$$

，定义为:

$$C = \kappa_e C_0$$

其中，C_0是真空中的电容,κ_e总是大于 1。

电容变大的原因

当平行板电容器之间插入两个导体时，电容变大是因为原来的电容变成了两个新的电容串联，

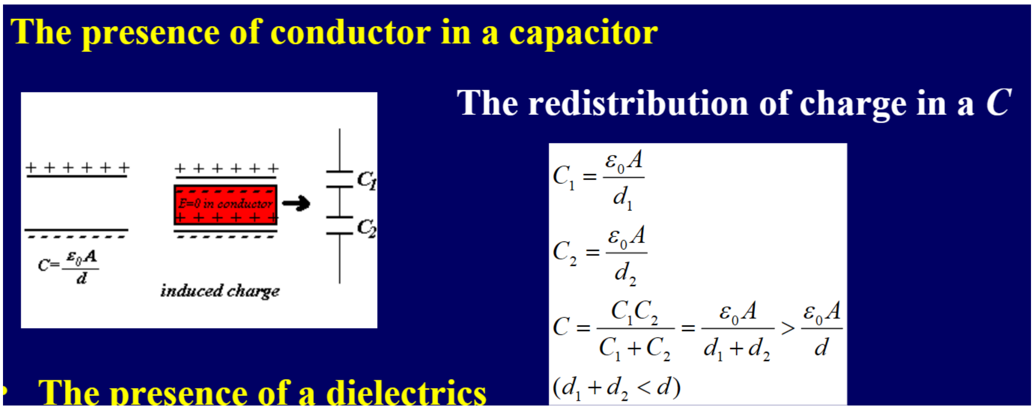


Figure 13: 插入导体

然而，当平行板之间插入绝缘体时，就不是这样了。我们称之为极化。

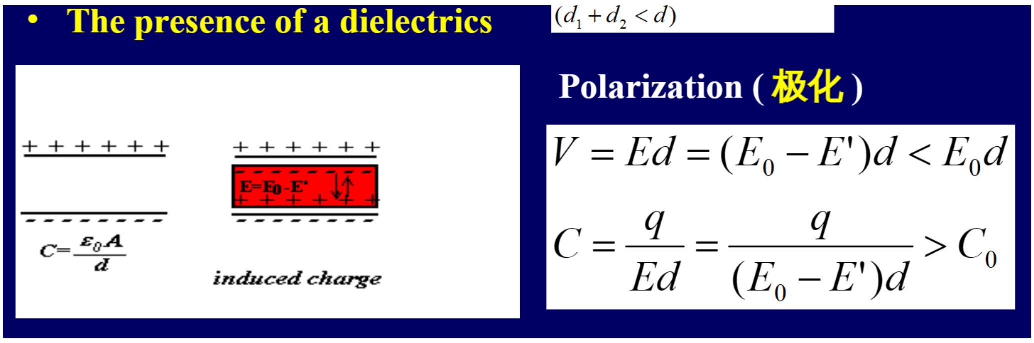


Figure 14: 插入绝缘体

普物复习

极化强度矢量

定义为:

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{(\Delta V)}$$

p 是我们之前提到过的电偶极矩。

电位移矢量

$$D = \varepsilon E + P$$

并且有

$$\oiint D \cdot \mathrm{d}A = \sum q_0$$

这里的q_0指的是自由电荷。

并且

$$P = \chi_e \varepsilon_0 E$$

$$D = \kappa_e \varepsilon_0 E$$

$$\kappa_e = \chi_e + 1$$

其中,κ_e就是之前提到过的介电常数，χ_e称为极化率。

Chapter31 恒定电流

电流密度矢量

$$j = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}A}$$

电阻率

$$R = \frac{\rho l}{A}$$

电导率

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

于是我们可以推得

$$\Delta i = \frac{\Delta V}{R}$$

$$j \Delta A = \frac{E \Delta l}{\rho \frac{\Delta l}{\Delta A}}$$

$$j = \frac{E}{\rho}$$

$$= \sigma E$$

普物复习

Chapter32 恒定磁场

磁感应强度

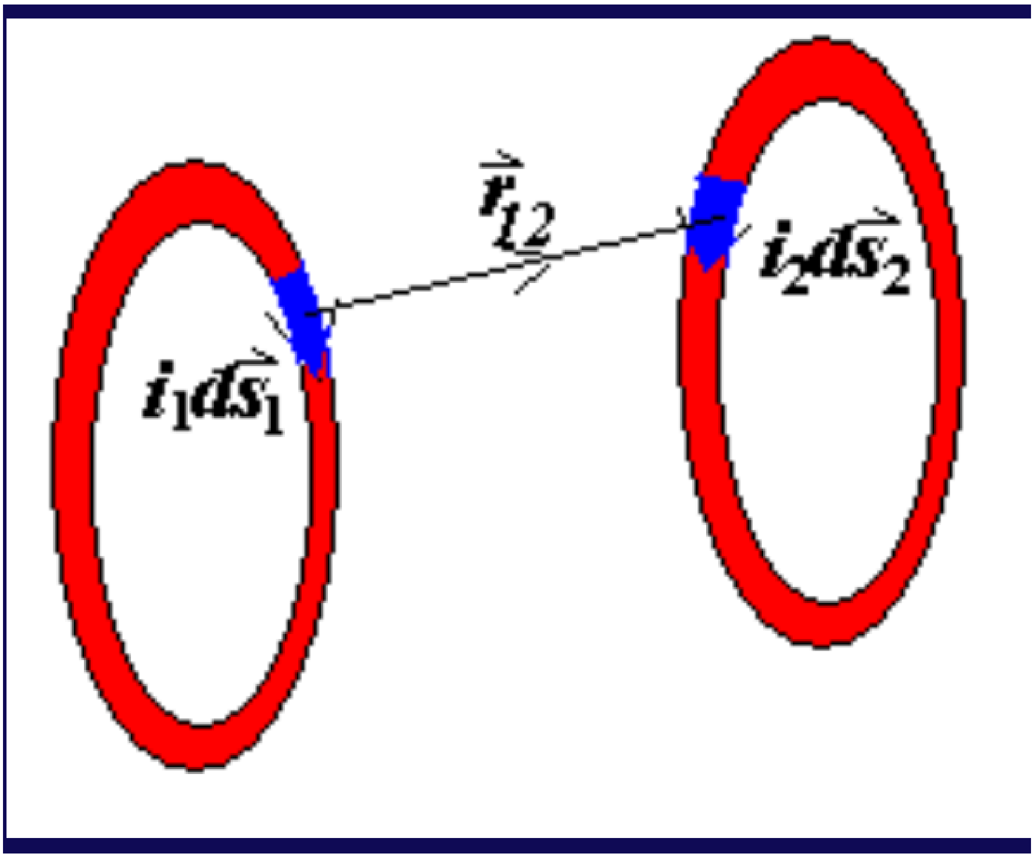


Figure 15: 磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{i_1\,\mathrm{d}s_1 \times \hat{r}_{12}}{r_{12}^2}$$

磁场的安培环路定理

$$\int_c B \cdot \mathrm{d}l = \mu_0 i$$

其中，i 的正方向是遵守右手定则的方向。

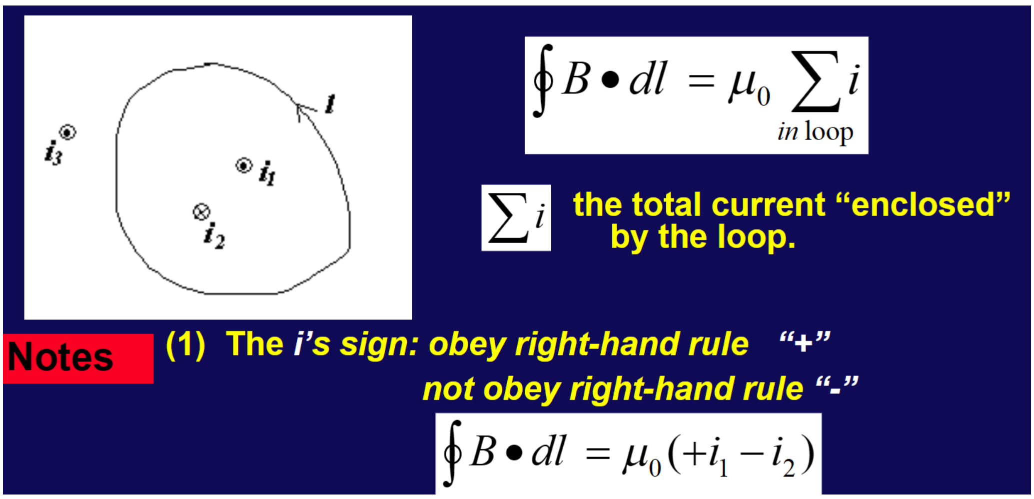


Figure 16: 安培环路定理

普物复习

一些模型

无限长直导线

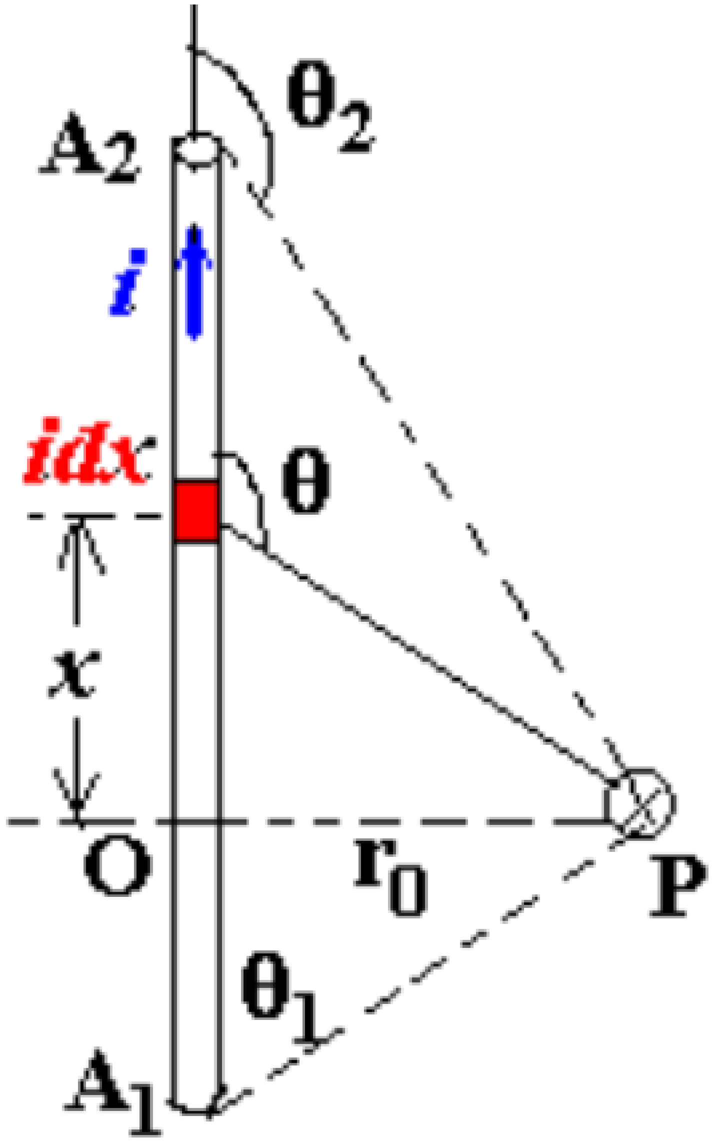


Figure 17: 无限长直导线

直接使用安培环路定理，取一个圆形环路，我们可以得到

$$B \cdot 2\pi r_0 = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r_0}$$

也可以用这样的结论:

$$B = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin\theta \cdot \frac{r_0 d\theta}{\sin^2\theta}}{r_0^2 / \sin^2\theta} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi r_0}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

Figure 18: 直导线周围磁场强度结论

普物复习

圆环

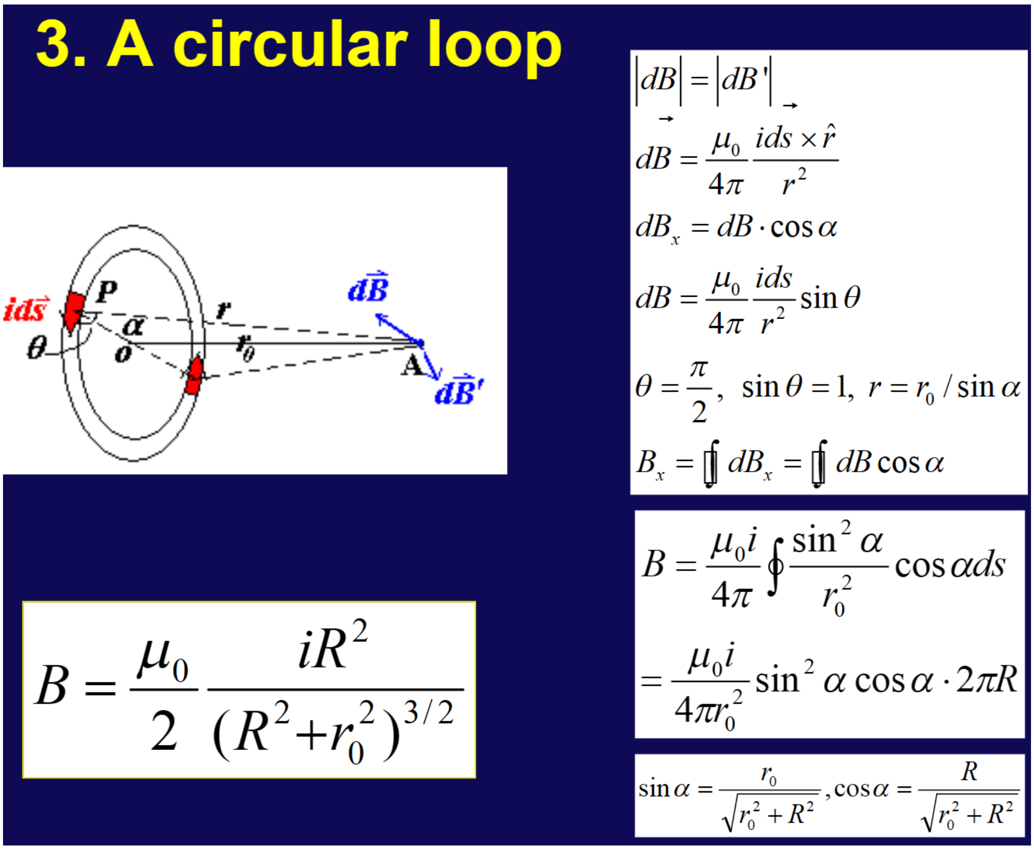


Figure 19: 圆环

无限大极板

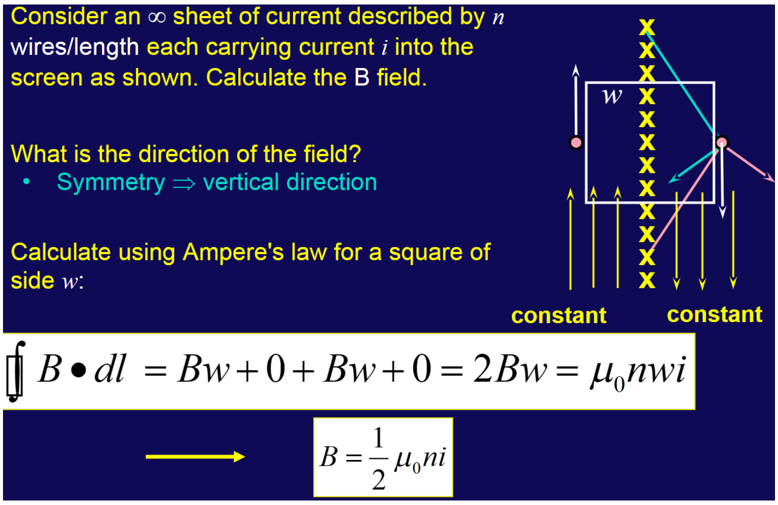


Figure 20: 极板的磁场是平行于板的

螺线管

看成两个无限大极板构成。

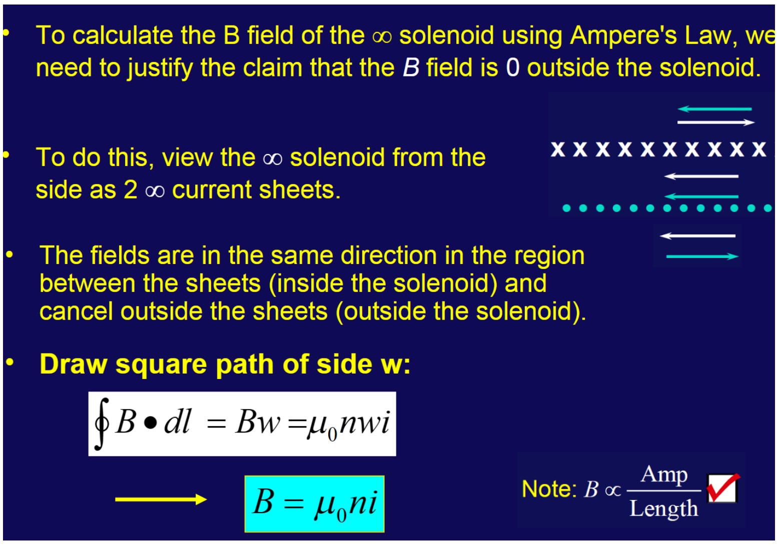


Figure 21: 螺线管内部是匀强磁场

也可以用这个结论。

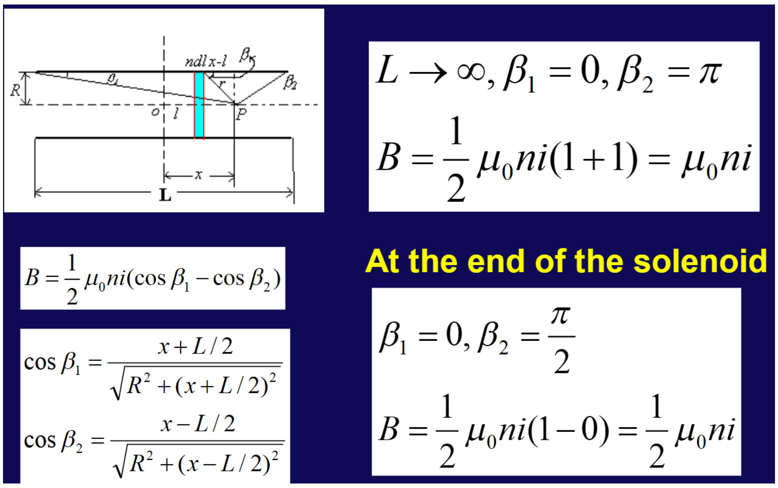


Figure 22: 螺线管结论

磁偶极矩

磁偶极矩的定义为：

$$\vec{\mu} = iA\vec{n}$$

$\vec{n}$是平面的单位法向量，方向由右手定则确定。

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Chapter34 法拉第电磁感应定理

动生电动势

$$\varepsilon = \int_C^D (\vec{v} \times B) \cdot \mathrm{dl}$$

普物复习

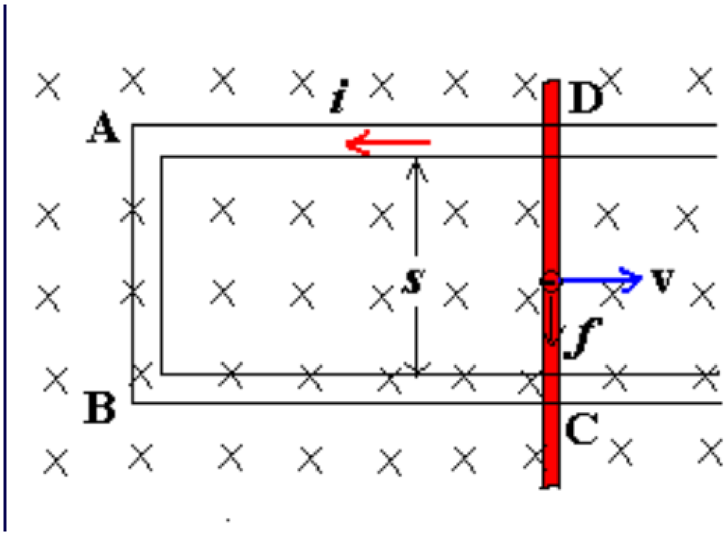


Figure 23: 切割磁感线

感生电动势

感生电动势ε

$$\varepsilon = \oint E \cdot \mathrm{d}l = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

又

$$\Phi = \iint B \cdot \mathrm{d}A$$

$$\oint E \cdot \mathrm{d}l = -\iint \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \mathrm{d}A$$

$$\nabla \cdot E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Chapter36 &35 自感与互感

互感

磁链Ψ定义为

$$\Psi = N\Phi$$

互感系数M定义为

$$M = \frac{\Psi}{i}$$

互感产生的电动势为

$$\varepsilon = -M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

自感

自感系数L定义为

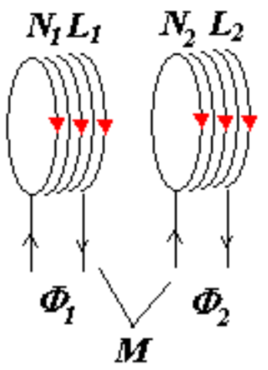
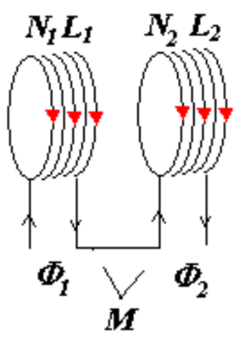
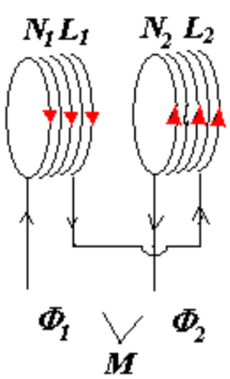
普物复习

$$L = \frac{\Psi}{i}$$

互感产生的电动势为

$$\Delta\varepsilon = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

自感与互感关系

情况	公式
	$M = \sqrt{L_1L_2}$
	$L = L_1 + L_2 + 2M = L_1 + L_2 + 2\sqrt{L_1L_2}$
	$L = L_1 + L_2 - 2M = L_1 + L_2 - 2\sqrt{L_1L_2}$

普物复习

材料的磁性质

磁化强度矢量 **M**

$$\overrightarrow{M}=\frac{\sum\mu_m}{\Delta V}$$

$$\oint M\cdot\mathrm{d}l=\sum i'$$

磁场强度 **H**

单位Os

$$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-M$$

安培环路定理有新的表现形式

$$\oint H\cdot\mathrm{d}l=\sum i$$

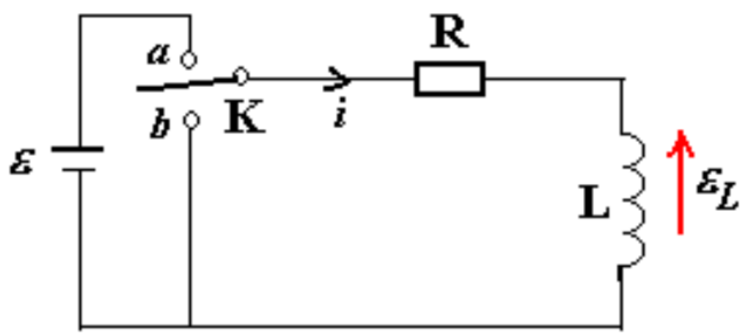
磁化率与磁导率

和极化率与介电常数的关系一样。

$$M=\chi_m H$$
$$B=\kappa_m\mu_0 H$$
$$\kappa_m=\chi_m+1$$

并且一个通电螺线管内插入磁导率为κ_m的材料时，自感系数$L=\kappa_m L_0$

RL 振荡电路



解析:

$$iR + L\frac{di}{dt} = \varepsilon$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(\varepsilon - iR) = -\frac{R}{L}\left(i - \frac{\varepsilon}{R}\right)$$

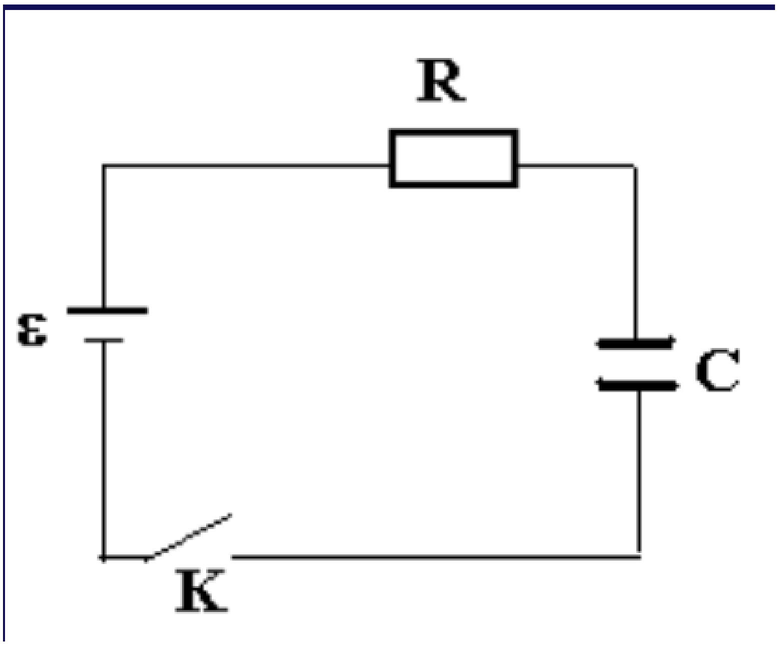
$$i - \frac{\varepsilon}{R} = C' e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$t = 0,\ i = 0,\quad \therefore C' = -\frac{\varepsilon}{R}$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{\frac{-tR}{L}}\right)$$

称$\tau_L = \frac{R}{L}$为时间常数

RC 振荡电路



解析:

普物复习

$$iR + \frac{q}{C} = \varepsilon$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = \frac{\varepsilon}{R}$$

$$q = C\varepsilon\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

磁场能量密度

$$\mu_b = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$U_b = \frac{1}{2} L I^2$$